TEMA 2: SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES EN EL TIEMPO

Sistemas lineales e invariantes con el tiempo (LTI): convolución, representación de la respuesta al impulso para sistemas LTI; propiedades de los sistemas LTI; otras representaciones de sistemas LTI.

SUMA DE CONVOLUCIÓN

Toda señal discreta $x[n]$ se puede representar como combinación lineal de señales elementales, funciones base. Representamos la señal de entrada como una combinación de una de las funciones base vistas en el tema 1: *impulsos desplazados*

$$x[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Si el sistema es lineal e invariante en el tiempo (LTI), la salida viene dada por:

$$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

donde $h[n]$ es la *respuesta al impulso* del sistema (respuesta del sistema LTI a una δ en el instante $n = 0$). El operador $*$ representa la operación de convolución, en este caso de señales discretas.

- La respuesta al impulso $h[n]$ caracteriza al sistema LTI discreto. Conocer $h[n]$ es suficiente para determinar la salida.

- La salida del sistema LTI se puede obtener mediante la suma de convolución, convolución de la señal de entrada $x[n]$con la respuesta al impulso $h[n]$.

INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

Al igual que en el caso discreto, una señal continua $x(t)$ puede escribirse como una combinación lineal de funciones elementales. Representaremos la señal de entrada como combinación lineal de impulsos desplazados:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Si el sistema es lineal e invariante en el tiempo (LTI), la salida:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

donde $h(t)$ es la respuesta al impulso del sistema (respuesta del sistema LTI a una δ en el instante $t = 0$) y el operador $*$ indica convolución entre señales.

- La respuesta al impulso $h(t)$ caracteriza completamente al sistema LTI continuo. Conocer $h(t)$ es suficiente para determinar la salida.
- La salida del sistema LTI se puede obtener mediante la integral de convolución, convolución de la señal de entrada $x(t)$con la respuesta al impulso $h(t)$.

PROPIEDADES DE LA CONVOLUCIÓN

Propiedad conmutativa

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$
$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Propiedad asociativa

$$x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\} = \{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n]$$
$$x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\} = \{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t)$$

Propiedad distributiva

$$x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$
$$x(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\} = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

RESPUESTA AL IMPULSO DE INTERCONEXIÓN DE SISTEMAS

Sistemas en serie

Sistema 1: respuesta al impulso $h_1[n]$ / $h_1(t)$

Sistema 2: respuesta al impulso $h_2[n]$ / $h_2(t)$

- Sistema equivalente:

$$\boxed{\begin{gathered} h[n] = h_1[n] * h_2[n] \\ h(t) = h_1(t) * h_2(t) \end{gathered}}$$

Sistemas en paralelo

Sistema 1: respuesta al impulso $h_1[n]$ / $h_1(t)$

Sistema 2: respuesta al impulso $h_2[n]$ / $h_2(t)$

- Sistema equivalente:

$$\boxed{\begin{array}{c} h[n] = h_1[n] + h_2[n] \\ h(t) = h_1(t) + h_2(t) \end{array}}$$

PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS LTI

<u>Se analizan las propiedades de los sistemas en función de su respuesta al impulso</u>

Sistemas sin memoria

$h[n] = c\,\delta[n]$

$h(t) = c\,\delta(t)$

(si la delta está desplazada el sistema tiene memoria)

Sistemas causales

$h[n] = 0, n < 0$

$h(t) = 0, t < 0$

Sistemas estables

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$

Sistemas invertibles

Si $h[n]$ o $h(t)$ es la respuesta al impulso del sistema LTI discreto o continuo y si $h^{-1}[n]$ o $h^{-1}(t)$ las correspondientes respuestas al impulso del sistema inverso, entonces:

$$h[n] * h^{-1}[n] = \delta[n]$$

$$h(t) * h^{-1}(t) = \delta(t)$$

OTRAS REPRESENTACIONES:

- Ecuaciones diferenciales y en diferencias (EDD)
- Diagramas de bloques
- Variables de estado

PROCEDIMIENTO GRÁFICO DE LA CONVOLUCIÓN DE SEÑALES DISCRETAS:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

1. Analizar y dibujar $x[n]$ y $h[n]$ como funciones de la variable k para un n fijo. Representar $x[k]$ y $h[k]$.
2. Representar $h[n-k]$
   Recordar que si k es la variable podemos escribir: $h[n-k] = h[-(k-n)]$, es decir:
   2.1 Reflejar $h[k]$ para obtener $h[-k]$
   2.2 Desplazar la secuencia un valor n comenzando por un desplazamiento largo y negativo $(n < 0)$, es decir, adelantar la secuencia reflejada.
3. Analizar la función $x[k]h[n-k]$, es decir, el solapamiento entre ambas funciones. Incrementar n hasta observar un cambio de tendencia en el solapamiento. El valor de n para el que se produce el cambio define el fin del intervalo considerado y el comienzo de un nuevo intervalo de análisis.
4. Considerar n en el nuevo intervalo y repetir el paso 3.
5. Para cada intervalo de tiempo se suman todos los valores correspondientes al producto $x[k]h[n-k]$ y así obtenemos $y[n]$ en cada intervalo analizado.

PROCEDIMIENTO GRÁFICO DE LA CONVOLUCIÓN DE SEÑALES CONTINUAS:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

1. Analizar y dibujar $x(t)$ y $h(t)$ como funciones de la variable τ para un t fijo. Representar $x(\tau)$ y $h(\tau)$.
2. Representar $h(t-\tau)$
   Recordar que si k es la variable podemos escribir: $h(t-\tau) = h\big(-(\tau-t)\big)$, es decir:
   2.1 Reflejar $h(\tau)$ para obtener $h(-\tau)$
   2.2 Desplazar la señal un valor t comenzando por un desplazamiento largo y negativo $(t < 0)$, es decir, adelantar la señal reflejada.
3. Analizar la función $x(\tau)h(t-\tau)$, es decir, el solapamiento entre ambas funciones. Incrementar t hasta observar un cambio de tendencia en el solapamiento. El valor de t para el que se produce el cambio define el fin del intervalo considerado y el comienzo de un nuevo intervalo de análisis.
4. Considerar t en el nuevo intervalo y repetir el paso 3.
5. Para cada intervalo de tiempo se integran todos los valores correspondientes al producto $x(\tau)h(t-\tau)$ y así obtenemos $y(t)$, en cada intervalo analizado.